Décomposition de Doob

Ce document propose des éléments de correction pour les questions 1 et 2 de l'exercice 2.12. La question 1 établit un théorème de décomposition unique sous la forme « prévisible + martingale ». Les questions 2 et 3 se proposent d'illustrer ce que ce théorème peut donner quand on l'applique à des processus concrets. On se concentrera sur une seule application — celle donnée par la question 2. On redécouvrira ainsi, depuis un chemin nouveau, une martingale bien connue. La question 2(b) est également intéressante pour s'exercer au maniement du théorème d'arrêt ou des martingales arrêtées.

Commençons par rappeler un mode de raisonnement classique : le **raisonnement par analyse-synthèse**. On cherche à démontrer qu'il existe un unique x tel que blabla. On commence par l'étape dite d'*analyse* : « Soit x tel que blabla. On démontre que x doit être un certain x_0 bien précis ». À l'issue de cette phase, on a démontré rigoureusement l'unicité du x en question : il en existe au plus un, à savoir x_0. Toutefois, pour conclure, proprement, il reste à effectuer une seconde phase — la *synthèse* : dans cette étape, on vérifie (si tel est bien le cas) que x_0 vérifie *en effet* blabla. Si cette étape de synthèse est un succès, on a alors bien démontré qu'il existait un et un seul x tel que blabla. En passant, on obtient même un résultat bonus — on sait qui est ce x : c'est x_0.

Pourquoi la synthèse est-elle importante ? Quels sont les réels tels que $x = x+1$? Soit x tel que $x = x+1$. Je vais montrer que $x = 0$. En effet, si $x \neq 0$, alors on a le droit de diviser par x, ce qui donne $1 = 1 + \frac{1}{x}$ donc $\frac{1}{x} = 0$, ce qui n'est pas possible. Donc $x = 0$. L'étape d'analyse est un succès : j'ai (rigoureusement !) montré que si $x = x+1$, alors $x = 0$. C'est uniquement l'échec de la synthèse qui fait qu'il n'existe pas un unique x tel que $x = x+1$. Pouvez-vous trouvez vos propres exemples d'analyse où la synthèse ne fonctionne pas ?

1 *Analyse :* Soient (M_n) et (A_n) comme dans l'énoncé. Cherchons à les identifier. Pour tout $k \geq 1$, posons $\Delta_k = \mathbf{E}(X_k - X_{k-1} \,|\, \mathscr{F}_{k-1})$. Soit $n \geq 0$. On a $\mathbf{E}(X_{n+1} - X_n \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathbf{E}(M_{n+1} - M_n \,|\, \mathscr{F}_n) + \mathbf{E}(A_{n+1} - A_n \,|\, \mathscr{F}_n) = 0 + A_{n+1} - A_n$, où la dernière égalité utilise que (M_k) est une martingale et que (A_k) est prévisible. Donc $A_{n+1} - A_n = \Delta_{n+1}$. Puisqu'on a $A_0 = 0$, on obtient par récurrence que, pour tout n, on a $A_n = \Delta_1 + \cdots + \Delta_n$. Comme les Δ_k sont définis à partir des X_i seulement (pas des M_i ou des A_i), on a bien réussi à identifier les A_i. Les M_i s'en déduisent à leur tour : puisque $X_i = M_i + A_i$, on doit avoir $M_i = X_i - A_i = X_i - \Delta_1 - \cdots - \Delta_i$.

Synthèse : On ré-utilise les Δ_k précédemment introduits. On pose $A_k = \Delta_1 + \cdots + \Delta_k$ et $M_k = X_k - \Delta_1 - \cdots - \Delta_k$. Il s'agit de vérifier que (A_k) est prévisible croissant et que (M_k) est une martingale. Je prétends que si vous essayez et écrivez les choses proprement[1], alors vous y arriverez. Dans ce genre de circonstances, il n'est pas formateur de lire : il est formateur d'écrire soi-même la démonstration.

[1] Si en essayant, vous vous empêtrez, déchiffrez l'indication en fin de document avec un miroir.

Demandez-moi si vous avez vraiment essayé (et regardé l'indication) mais pas réussi.

Commentaire Avec la même démonstration, on peut établir le résultat suivant : si (X_n) désigne un processus adapté constitué des variables aléatoires intégrables, alors il s'écrit de façon unique comme somme d'une martingale et d'un processus prévisible (nul en 0, pas nécessairement croissant). Le processus prévisible est croissant si et seulement si (X_n) est une sous-martingale, décroissant ssi (X_n) est une surmartingale, et nul ssi (X_n) est une martingale.

2(a) Le fait que (X_n) est une martingale suit la même démonstration que d'habitude. Le fait que chaque X_n est de carré intégrable vient du fait qu'une somme finie de variables aléatoires de carré intégrable est encore de carré intégrable. On en déduit que (X_n^2) est une sous-martingale (voir la proposition 1.9, page 27 du polycopié de cours).

Ensuite, pour calculer la décomposition de Doob, on utilise la formule obtenue en répondant à la question 1 : il suffit de calculer les Δ_k. Attention, on veut appliquer la question 1 à la sous-martingale (X_n^2) donc on utilise la question 1 en posant $X'_n = X_n^2$. Autrement dit, on cherche à écrire $X_n^2 = M_n + A_n$ et on a $\Delta_k = \mathbf{E}(X_k^2 - X_{k-1}^2 \,|\, \mathscr{F}_{k-1})$. On écrit $X_k = X_{k-1} + Y_k$, on développe le carré $X_k^2 = (X_{k-1} + Y_k)^2$ puis on utilise les propriétés usuelles de l'espérance conditionnelle : on obtient alors que $\Delta_k = \sigma^2$. On en déduit que la martingale est donnée par $M_n = X_n^2 - n\sigma^2$ et le processus prévisible croissant par $A_n = n\sigma^2$. La martingale (M_n) vous dit-elle quelque chose ?

2(b) Cette question fait écho à 2.14(5). Comme (X_n) est une martingale et T un temps d'arrêt, le processus $(X_{T\wedge n})$ est une martingale. L'hypothèse de l'énoncé nous dit précisément que la martingale $(X_{T\wedge n})$ est bornée dans $\mathbf{L}^2$. D'après le théorème 4.7 de la page 37, $(X_{T\wedge n})$ converge presque sûrement et dans $\mathbf{L}^2$ vers une certaine variable aléatoire X_∞, puisque $1 < 2 < \infty$. Comme T est fini presque sûrement, $X_{T\wedge n}$ converge presque sûrement vers X_T (elle stationne presque sûrement sur cette valeur à partir du rang aléatoire T). Combinant les deux phrases précédentes, on obtient que $X_{T\wedge n}$ converge vers X_T dans $\mathbf{L}^2$. Employant la martingale (M_n) introduite en 2(a) et le temps d'arrêt T, on dispose de la martingale $(M_{T\wedge n})$. En particulier, pour tout n, on a $\mathbf{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbf{E}(M_0) = 0$. Or $\mathbf{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbf{E}(X_{T\wedge n}^2) - \sigma^2\mathbf{E}(T \wedge n)$. Dire que $X_{T\wedge n}$ converge dans $\mathbf{L}^2$ vers X_T^2 implique que $\mathbf{E}(X_{T\wedge n}^2)$ converge vers $\mathbf{E}(X_T^2)$ *(attention, la réciproque serait fausse !)*. Reste à justifier que $\mathbf{E}(T \wedge n)$ converge vers $\mathbf{E}(T)$, ce qui peut se faire par convergence dominée (en dominant par T) ou par convergence monotone. Si on utilise le théorème de convergence monotone, on n'a même pas besoin de supposer le temps d'arrêt intégrable, seulement fini presque sûrement.

Remarquez que Δ_k est $\mathscr{F}_{k-1}$-mesurable et intégrable. Vous devriez pouvoir déduire de cela toutes les intégrabilités et mesurabilités requises pour les M_k et A_k. La croissance de (A_k) revient à la positivité des Δ_k, qui n'est qu'une reformulation du fait que (X_k) est supposée être une sous-martingale. Enfin, pour voir si (M_k) est une martingale, il s'agit de montrer que $\mathbf{E}(M_{n+1} - M_n \,|\, \mathscr{F}_n)$ est nul : si on revient à la définition des M_k, la différence $M_{n+1} - M_n$ ne comporte, après une première simplification, plus que quatre termes, qui se laissent bien gérer.